Université de Lyon - ENS Lyon
Groupe de travail : Bloch's lectures on algebraic cycles

INTRODUCTION

F. DÉGLISE

Table des matières

1. Héritage et motivations

Bloch commence son introduction par un rappel des deux résultats fondamentaux du XIXeme siècle qui ont fait le succès et constitué le terreau de la géométrie algébrique du XXème siècle : le théorème de Riemann-Roch et celui d'Abel-Jacobi.

On rappelle ces théorèmes pour introduire nos notations. Dans les deux premières sections X est une *courbe algébrique complexe projective lisse connexe*, ou de manière équivalente, une surface de Riemann. On notera g son genre ; par définition :

$$g = \dim_{\mathbb{C}} \big(H^1(X, \mathcal{O}_X)\big).$$

Notre référence pour la théorie de base des cycles algébriques sera [Ful98] et pour la géométrie complexe [GH94].

1.1. Théorème de Riemann-Roch.

1.1.1. On rappelle qu'un *diviseur* sur X est une somme formelle finie

$$D = \sum_{i \in I} n_i . x_i$$

où $n_i\ in \mathbb{Z}$ et $x_i \in X(\mathbb{C})$ des points (fermés) de X. Les diviseurs de X forment un groupe noté $Z^1(X)$.

On dit que D est effectif si pour tout $i \in I$, $n_i \geq 0$. Le *degré* de D est l'entier

$$\deg(D) := \sum_{i \in I} n_i.$$

Date: Octobre 2016.

Exemple 1.1.2. (1) Soit f un fonction rationnelle sur X – on note $\kappa(X)^\times$ le corps des fonctions rationnelles. Si $f \neq 0$, on lui associe un diviseur :

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{i \in I} n_i.x_i - \sum_{j \in J} m_j.y_j$$

où x_i (resp. y_j) désignent les zéros (resp. pôles) de f avec multiplicité n_i (resp. m_j).

On a ainsi définit un morphisme :

$$\operatorname{div} = \operatorname{div}_X : \kappa(X) \to Z^1(X)$$

et son image est notée $Z_{\mathrm{rat}}(X)$. La relation d'équivalence

$$x \sim_{\mathrm{rat}} y \Leftrightarrow (x - y \in Z_{\mathrm{rat}}(X))$$

est appelée la *relation d'équivalence rationnelle* et le quotient

$$\mathrm{CH}^1(X) = Z^1(X)/Z_{\mathrm{rat}}(X)$$

le groupe de Chow des diviseurs X.

(2) Soit $\mathcal{L}$ une faisceau inversible (localement libre de rang 1) de $\mathcal{O}_X$-module.

En considérant des paramétrisations locales ($\mathcal{L}|_U = \mathcal{O}_X.f$) on peut associer à $\mathcal{L}$ une classe canonique dans $\mathrm{CH}^1(X)$ notée $D(\mathcal{L})$ ($D(\mathcal{L})|_U = \operatorname{div}(f)$).

On obtient ainsi une application

$$D : \operatorname{Pic}(X) \to \mathrm{CH}^1(X)$$

qui est un isomorphisme. On note $\mathcal{L}$ l'isomorphisme réciproque.

Comme X est lisse de dimension 1, le faisceau $\omega_X = \Omega_{X/\mathbb{C}}$ des formes différentielles algébriques sur X est localement libre de rang 1. On note K_X la classe de diviseur qui lui est associée :

$$K_X := \mathcal{L}(\omega_X).$$

1.1.3. Fixons un diviseur D de X.

Le théorème de Riemann-Roch donne des informations sur les fonctions rationnelles f sur X telles que le diviseur

$$D + \operatorname{div}(f)$$

est effectif. Ce

Plus précisément, on pose :

$$l(D) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{L}(D)).$$

C'est aussi la dimension de l'es On défini aussi le *système linéaire complet* associé à D :

$$|D| = \left\{D' \in Z^1(X) \mid D \text{ effectif, } D' \sim_{\mathrm{rat}} D\right\}.$$

Alors $|D|$ est ou bien vide, auquel cas $l(D) = 0$, ou bien un espace projectif complexe de dimension $l(D) - 1$.

Théorème 1.1.4 (Riemann-Roch)**.** *Avec les notations qui précèdent, la relation suivante est vraie :*

$$l(D) = l(K_X - D) + \deg(D) + 1 - g.$$

Idée de preuve : le théorème est basé sur la dualité de Serre :

$$H^0(X, \mathcal{L}(D))^\vee = H^1(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}(D)^\vee) = H^1(X, \mathcal{L}(K_X - D)).$$

On obtient donc :

$$\chi(X, \mathcal{L}(D)) := \sum_i (-1)^i . \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathcal{L}(D)) = l(D) - l(K_X - D).$$

Il reste à démontrer : $\chi(X, \mathcal{L}(D)) = \deg(D) + 1 - g$. Dans le cas où $D = 0$, *i.e.* $\mathcal{L}(0) = \mathcal{O}_X$ et cette relation est une conséquence de la définition du genre de X (et du fait qu'il n'y a pas de fonction globale non constante sur X. On démontre le résultat par indution à partir de la relatio, pour tout point rationnel X de X :

$$\chi(X, \mathcal{L}(D + x)) = 1 + \chi(X, \mathcal{L}(D + 1)).$$

cf. [Har77, IV, 1.3].

Les applications de ce théorème en arithmétique sont très nombreuses. On en verra une concernant les fonctions zêtas au cours de ce groupe de travail. On peut citer la preuve de Weil de l'analogue de l'hypothèse de Riemann pour les courbes sur une corps fini. Pour des applications plus directes, on renvoie à [Har77, IV.1].

1.2. **Théorème d'Abel-Jacobi.**

1.2.1. Le théorème d'Abel-Jacobi, sous sa forme moderne, donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un diviseur D soit rationnellement équivalent à 0. Une condition nécessaire évidente est le fait que D est de degré 0. On pose suivant Bloch :

$$A_0(X) := \{D \in CH_0(X) \mid \deg(D) = 0\}$$

groupe que l'on note parfois aussi : $\mathrm{CH}_0(X)_0 \simeq \mathrm{Pic}^0(X)$.

1.2.2. Homologie singulière.– En considérant le complexe des chaînes singulières de la surface de Riemann X^{an} (simplement notée X par la suite), on obtient l'homologie de Betti. Un n-simplexe de X est une application continue :

$$\sigma : \Delta^n \to X$$

où Δ^n est le n-simplexe standard. [1] Le complexe des chaînes singulières de X est le complexe qui en degré n est l'ensemble $C_n^{\mathrm{sing}}(X, \mathbb{Z})$ des combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires formelles de n-simplexes et avec pour application bord :

$$d_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i . \sigma|_{\Delta_n^i}$$

où Δ_n^i est la i-ème face de Δ^n, identifié à l'espace Δ^{n-1}.

Le groupe $H_n^B(X, \mathbb{Z})$ est le *n-ème groupe de Betti de X* – ce groupe a plutôt été défini, d'une manière différente mais équivalente par Poincaré. Ainsi $H_1^B(X, \mathbb{Z})$ est le groupe abélien formé des lacets

$$\sigma : I = \Delta^1 \to X$$

avec $\sigma(0) = \sigma(1)$ modulo la relation d'homologie : σ homologue à 0 si il existe β une 2-chaine singulière telle que $\sigma = d(\beta)$.

1.2.3. Intégration des formes différentielles.– Rappelons que Ω_X est le faisceau des formes différentielles algébriques sur X. Il s'identifie au faisceau des formes différentielles sur la variété analytique X^{an}.

Fixons une forme différentielle $\omega \in \Gamma(X, \Omega_X)$ et un n-simplexe $\sigma : I \to X$. Alors on définit :

$$\int_\sigma \omega = \int_{t=0}^{1} \sigma^*(\omega)$$

où $\sigma^*(\omega) = f_\sigma(t).dt$ est la forme différentielle sur I obtenue par image inverse et on munie X de sa métrique Riemannienne.

Cette définition s'étend aux n-simplexes et la formule de Stokes montre que si ω est fermée, l'élément $\int_\sigma \omega$ ne dépend que de la classe d'homologie de σ.

1. Par exemple, $\Delta^n = \{t_1, ...t_n \geq 0 \mid \sum_i t_i \leq 1\}$.

1.2.4. Théorie de Hodge.– Rappelons que la cohomologie de De Rham $H^i_{\mathrm{dR}}(X)$ de X est la cohomologie du complexe de De Rham, algèbre extérieure engendrée par $\Omega^1(X)$.

D'après la théorie de Hodge, le groupe abélien $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ se décompose :

$$H^1_{\mathrm{dR}}(X) = H^{1,0}(X) \oplus H^{0,1}(X)$$

où $H^{1,0}(X) = H^0(X, \Omega_X^{\mathrm{hol}})$ l'espace des 1-formes différentielles *holomorphes* sur X^{an}. [2] Rappelons en particulier que toute forme holomorphe est fermée.

On obtient donc un morphisme canonique :

$$I : H_1(X, \mathbb{Z}) \to \Gamma(X, \Omega_X^{\mathrm{hol}})^*, \sigma \mapsto \left(\omega \mapsto \int_\sigma \omega\right)$$

que l'on vérifie être injectif – c'est essentiellement un corollaire du théorème de De Rham. Rappelons :

- $H_1(X, \mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre engendré par $2g$ éléments (il est isomorphe à l'abélianisé du groupe fondamental de X).
- $H^{0,1}(X) = \overline{H^{1,0}(X)}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- $H^1_{\mathrm{dR}}(X) \simeq H^1_B(X, \mathbb{C}) \simeq H^1_B(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$.

Les deux derniers points entrainent que $H^{1,0}(X)$, l'espace des formes différentielles holomorphes sur X est de dimension complexe g. Ainsi, $H_1(X, \mathbb{Z})$ définit un réseau dans $\Gamma(X, \Omega_X^{\mathrm{hol}})^*$ est le quotient :

$$\Gamma(X, \Omega_X^{\mathrm{hol}})^*/H_1(X, \mathbb{Z})$$

est un tore complexe. On vérifie de plus qu'il admet une structure de variété algébrique projective lisse sur $\mathbb{C}$., la jacobienne $J(X)$ de la courbe X.

Définition 1.2.5. La variété algébrique complexe dont les points complexes sont le groupe abélien

$$\Gamma(X, \Omega_X^{\mathrm{hol}})^*/H_1(X, \mathbb{Z})$$

est appelée la jacobienne de X, noté $J(X)$. C'est une variété abélienne (schéma en groupes projectif lisse).

1.2.6. On fixe un point base x_0 dans X^{an}.

Soit ω une forme homolomorphe sur X. Pour tout point x dans x_0, il existe un chemin γ_x de x à x_0 et l'élément :

$$\int_{\gamma_x} \omega$$

ne dépend pas du choix du chemin (en appliquant à nouveau la formule de Stokes). On en déduit donc un morphisme

$$X^{\mathrm{an}} \to J(X), x \mapsto \left(\omega \mapsto \int_{\gamma_x} \omega\right)$$

qui s'étend – du fait que $J(X)$ est un groupe abélien – en un morphisme

$$Z_0(X) \to J(X).$$

Théorème 1.2.7 (Abel-Jacobi)**.** *Le morphisme précédent induit un isomorphisme :*

$$\Theta : A_0(X) \to J(X)$$

entre les classes de diviseurs de degré 0 *est les (points fermés) de la jacobienne de* X*.*

2. *i.e.* ω s'écrit localement sous la forme $f(z).dz$ pour une fonction holomorphe $f(z)$ est un paramétrisation holomorphe z.

Le morphisme Θ est appelé l'application d'Abel-Jacobi. Historiquement, l'injectivité est due à Abel, et la surjectivité à Jacobi. Pour la preuve, on renvoie à [GH94, chap. 2, sec. 2].

1.3. **Cycles de codimension supérieure.**

1.3.1. La piste naturelle pour généraliser ces résultats est de considérer la cas une variété algébrique projective lisse X, sur un corps k, de dimension d supérieure à 1.

Les *cycles algébriques* sont les combinaisons linéaires de sous-variétés intègres fermées, ou ce qui revient au même du point de vue schématique, de points de X. Ceux-ci admettent deux graduations naturelles, une par la dimension et l'autre par la codimension :

$$Z_r(X) = Z^{d-r}(X) = \{\sum_i n_i.x_i \mid \dim\left(\overline{\{x_i\}}\right) = r\}.$$

Si Z est un sous-schéma fermé intègre de X et $f \in \kappa(Z)^\times$ une fonction rationnelle sur Z, on peut définir le diviseur associé à f dans X :

$$\operatorname{div}(f) = \sum_x \operatorname{ord}_x(f).x$$

où x parcourt l'ensemble des points de codimension 1 – si x est un point régulier de Z, l'anneau $\mathcal{O}_{Z,x}$ est un anneau de valuation discrète et $\operatorname{ord}_x(f)$ est la valuation de f correspondante ; si x est singulier, on obtient $\operatorname{ord}_x(f)$ en normalisant Z puis en utilisant la trace (cf. [Ful98]). Un tel cycle est alors dit rationnellement équivalent à 0.

On pose $\mathrm{CH}_r(X) := Z_r(X)/\sim_{\mathrm{rat}}$, ce qui généralise la définition qu'on a vue pour les courbes. On obtient sur $\mathrm{CH}^*(X)$ une structure d'anneau gradué.

Le cas des diviseurs est bien compris, notamment parce que l'isomorphisme de l'exemple 1.1.2(2) est encore valable :

$$\mathcal{L} : CH^1(X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}(X).$$

Notons au passage que l'isomorphisme réciproque est noté c_1 et appelé la première classe de Chern.

1.3.2. Équivalence algébrique.– Soit $\alpha, \beta \in CH^r(X)$. On dit que α et β sont *algébriquement équivalents*, $\alpha \sim_{\mathrm{alg}} \beta$, si il existe une courbe lisse connexe C sur k munie de deux points rationnels a, b distincts, et une cycle $\gamma \in \mathrm{CH}^{r+1}(X \times C)$ tels que

$$\alpha = \gamma.(X \times \{a\}), \beta = \gamma.(X \times \{b\}).$$

On obtient ainsi une relation d'équivalence sur $Z^r(X)$, plus fine que $\sim_{\mathrm{rat}}$. On note $Z^r_{\mathrm{alg}}(X)$ le groupe des cycles r-codimensionnels algébriquement équivalents à zéro et on pose :

$$A^r(X) = Z^r_{\mathrm{alg}}(X)/Z^r_{\mathrm{rat}}(X).$$

Notons encore une définition classique dans le cas de codimension 1. Le groupe de Néron-Severi est le groupe abélien :

$$NS(X) = Z^1(X)/Z^1_{\mathrm{alg}}(X).$$

Avec les notations de Bloch, $NS(X) = CH^1(X)/A^1(X)$.

Exemple 1.3.3. (1) Les 0-cycles de X, sommes formelles de points, admettent un degré, application linéaire telle que :

$$\deg(x) = [\kappa(x) : k].$$

Un cycle algébriquement équivalent à 0 est nécessairement de degré nul (formule de projection). D'où un morphisme :

$$Z_0(X)/Z_0^{\mathrm{alg}}(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}.$$

Si k est algébriquement clos, c'est un isomorphisme. Autrement dit, :

$$CH_0(X)/A_0(X) = \mathbb{Z}.$$

(2) Si X admet un point fermé (*i.e.* k-rationnel), le groupe :

$$CH^1(X)_0 = \mathrm{Pic}^0(X)$$

des classes rationnelles de diviseurs (ou encore des classes d'isomorphies de fibrés inversibles) de degré 0 est en bijection avec l'ensemble des k-points d'un k-schéma abélien, le schéma de Picard de X (dual du schéma d'Albanese).

(3) Si F est un anneau intègre de caractéristique nulle, le groupe abélien $NS(X)_F = NS(X) \otimes_{\mathbb{Z}} F$ est un F-module libre de type fini.

Si $F \supset \mathbb{Q}$, et X est une surface, l'accouplement :

$$NS(X)_F \otimes_F NS(X)_F \to F, (\alpha, \beta) \mapsto \deg(\alpha.\beta)$$

est un parfait.

Les but des exposés de Bloch est d'illustrer la théorie des cycles algébriques en codimension supérieure avec des applications dans trois domaines : géométriques, algébriques et arithmétiques.

2. Description succincte des résultats de Bloch

2.1. **Applications géométriques, lectures 1-3.** Ici, on se place sur le corps des complexes. Les trois premiers exposés concernent les jacobiennes intermédiaires définies par Weil puis Griffiths, et les applications d'Abel-Jacobi :

$$\Theta^r : A^r(X) \to J^r(X).$$

Le groupe abélien $J^r(X)$ est une tore complexe compact.

Pour $r = d$, $J^r(X) = J_0(X)$ n'est autre que les points rationnels de la variété d'Albanese de X. Autrement dit :

$$J_0(X) = \Gamma(X, \Omega_X^{1,\mathrm{hol}})^*/H_1(X, \mathbb{Z}).$$

Par ailleurs, Θ^0 est surjective.

Rappelons que le genre géométrique de X, projective lisse sur $\mathbb{C}$, est l'entier :

$$P_g(X) = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X, \omega_X)$$

où $\omega_X = \Lambda^d \Omega_X^1$ est le faisceau dualisant. Le but du premier exposé est de prouver le théorème de Mumford :

Théorème 2.1.1 (Mumford)**.** *Soit X une surface projective lisse complexe. Si $\mathscr{P}_g(X) \neq 0$, alors le noyau de $\Theta_0 : A_0(X) \to J_0(X)$ est de dimension infinie.*

On peut reformuler ce théorème en disant que sur X comme ci-dessus, le groupe des cycles homologiquement triviaux modulo équivalence rationnelle est de dimension infinie.

Notons en particulier que $CH_0(X)$ est de dimension infinie.

Remark 2.1.2. Ce résultat contraste avec la situation conjecturale, dans le cas où k est un corps fini, ou même un corps de nombre. On conjecture alors que $CH_0(X)_{\mathbb{Q}}$ est de dimension finie, et même d'ailleurs tout l'anneau de Chow $CH^*(X)_{\mathbb{Q}}$ est de dimension finie (c'est un théorème, dû à Mordell et Weil dans le cas des courbes sur un corps de nombres).

Les exposés 2 et 3 continuent l'étude de l'application Θ dans le cas des quartiques de dimension 3 (exposé 2) et une variante de l'application Θ pour $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times C$, C une courbe (exposé 3, utilisé dans la partie arithmétique).

Tout cela justifie la conjecture de Bloch, un sujet très actif en ce moment :

Théorème 2.1.3. *Si X est une surface projective lisse complexe telle que $P_g(X) = 0$, alors Θ^0 est injective.*

2.2. **Partie algébrique, exposés 4-6.** Cette partie introduit les méthodes de K-théorie supérieure et en particulier la filtration par coniveau, la suite spectrale de Gersten et la résolution de Gersten.

On obtient ainsi des « faisceaux non ramifiés » dont la cohomologie Zariski calcule respectivement :

$$\mathrm{CH}^p(X), \mathrm{CH}^p(X)/A^p(X)$$

(exposé 4).

L'exposé 5 est consacré à l'application de ces techniques à un théorème de Roitman :

Théorème 2.2.1 (Roitman)**.** *Le morphisme*

$$\Theta_{tors} : A_0(X)_{tors} \to J_0(X)_{tors}$$

est un isomophisme.

L'exposé 6 concerne une étude détaillée pour les bas degrés de la filtration par coniveau (degré 2).

2.3. **Partie arithmétique, exposés 7-9.** Dans l'exposé 7, Bloch étudie le groupe $A_0(X)$ pour X une surface sur un corps local ou un corps global k. Deux résultats importans sont prouvés :

- en général, $A_0(X) \neq 0$.
- $A_0(X)$ est fini X est une surface fibrée en conique.

Les exposés 8 et 9 inaugurent, à la suite de Borel évidemment (dont le travail est le moteur principal des recherches de Bloch ici), les résultats fondamentaux sur les valeurs spéciales des fonctions zêtas. Ici, il s'agit de la fontion zêta associée à une courbe elliptique sur un corps de nombre admettant une multiplication complexe appropriée. La valeur spéciale en $s = 2$ est calculée par l'image d'un cycle canonique à travers l'application d'Abel-Jacobi.

3. Développements postérieurs

La K-théorie, la K-théorie supérieure : autour du théorème de Riemann-Roch.

Les groupes de Chow supérieurs aka cohomologie motivique placée magistralement dans le tableau conjectural des motifs mixtes par Beilinson. La théorie de Voevodsky.

Exposés 1-3 : La filtration de Bloch-Beilinson-Murre, description en termes motiviques. Finitude à la Kimura et conjecture de Bloch. Les tentatives d'Ayoub.

Exposés 4-6 : La preuve de la conjecture de Bloch-Kato-Milnor par Voevodsky et Rost.

Exposés 7-9 : reformulations modernes (Beilinson, Bloch-Kato, Fontaine-Perrin-Riou).

4. Calendrier prévisionnel

- Exposé 1 : 1/11
- Exposé 2-3 : 8/11
- Exposé 4 : 15/11
- Exposé 5 : 29/11

- Exposé 6 : 6/12
- Exposé 7 : 13/12
- Exposé 8-9 : 10/1, 17/1, 24/1, ...

Références

[Ful98] W. Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

[GH94] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Voi02] Claire Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, volume 10 of *Cours Spécialisés*. Société Mathématique de France, Paris, 2002.